

# Об особенностях нелинейного отклика колебательной природы диэлектрических сред при двухволновом смешении

M. С. Гусельников<sup>1)</sup>

Университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 28 октября 2024 г.

После переработки 19 ноября 2024 г.

Принята к публикации 20 ноября 2024 г.

В настоящей работе аналитически получено соотношение, устанавливающее связь между коэффициентом нелинейного показателя преломления колебательной природы  $n_2(\omega)$  и кубической восприимчивостью  $\chi^{(3)}(\omega'; \omega', \omega, -\omega)$  колебательной природы через известные из справочной литературы оптические, спектральные и тепловые характеристики вещества. Это соотношение позволяет рассчитывать нелинейный набег фазы низкоинтенсивного зондирующего излучения на частоте  $\omega'$  в поле мощной терагерцовой волны накачки на частоте  $\omega$ . Приведены теоретические оценки кубической восприимчивости  $\chi^{(3)}(\omega'; \omega', \omega, -\omega)$  воды и кварцевого стекла для эксперимента типа терагерцового эффекта Керра. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0370274X25010059, EDN: UMGTCW

**1. Введение.** Первые исследования явлений, возникающих при взаимодействии с веществом терагерцового (ТГц) излучения, которое условно можно определить как электромагнитное излучение в диапазоне частот 0.1–10 ТГц [1], были начаты еще в первой половине прошлого века [2]. Однако активное изучение эффектов, индуцируемых полем интенсивного ТГц излучения, началось лишь в последние десятилетия, когда получили широкое распространение эффективные источники и приемники мощных ТГц волн [1, 3]. Интенсивное ТГц излучение оказалось незаменимым инструментом для нелинейной спектроскопии вещества, поскольку в ТГц спектральном диапазоне находятся фундаментальные частоты колебаний атомов, молекул и молекулярных кластеров многих материалов, а длительность ТГц импульсов, составляющая единицы–десятки пикосекунд, соответствует характерным временем протекания динамических микропроцессов в веществе, таких как релаксация фононов, электрон-дырочных пар и т.д. [4–8].

Среди методов ТГц спектроскопии, основанных на нелинейных эффектах, особенно популярны техники типа *pump-probe* (накачки–зондирования). Такие техники подразумевают облучение исследуемого материала двумя импульсами – мощным импульсом накачки и маломощным импульсом–зондом. Большинство методов этого класса используют так называемый ТГц эффект Керра (THz Kerr Effect), ко-

торый по существу представляет собой аналог оптического эффекта Керра (Optical Kerr Effect) в ТГц диапазоне [9–13]. Суть этого эффекта заключается в том, что при распространении в исследуемой среде мощного линейно-поляризованного ТГц импульса накачки с центральной частотой спектра  $\omega_p$  одновременно со слабым оптическим зондирующими импульсом с центральной частотой спектра  $\omega_z$ , линейная поляризация которого повернута на угол 45° относительно поляризации ТГц импульса, оптический импульс испытывает наведенное двулучепреломление за счет нелинейного изменения показателя преломления среды вдоль направления колебаний электрического поля ТГц излучения. Наведенное двулучепреломление приводит к изменению направления поляризации зондирующего излучения, благодаря чему измеряя поляризацию можно определить нелинейный коэффициент  $n_2^{\text{cross}}$ , характеризующий так называемые эффекты перекрестного взаимодействия (*cross-coupling effects*) [14], который пропорционален кубической восприимчивости  $\chi^{(3)}(\omega_z; \omega_z, \omega_p, -\omega_p)$  и вводится по аналогии с коэффициентом нелинейного показателя преломления вещества как  $n = n_0 + n_2^{\text{cross}} I$ , где  $n$  – показатель преломления среды на частоте оптического излучения,  $n_0$  – линейный показатель преломления среды на частоте оптического излучения,  $I$  – усредненная по времени интенсивность ТГц излучения, измеряемая в Вт/см<sup>2</sup>. Выделяют также мгновенный нелинейный коэффициент  $n_{2,f}^{\text{cross}}$ , обусловленный электронно-колебательными процессами, и инерционный коэф-

<sup>1)</sup>e-mail: msguselnikov@itmo.ru

фициент  $n_{2,s}^{\text{cross}}$ , обусловленный переориентацией молекул в веществе. В последнем случае вместо средней интенсивности в выражении для показателя преломления следует рассматривать свертку мгновенной интенсивности с функцией отклика среды. В настоящей работе, однако, речь идет только о мгновенной части нелинейного отклика, так что  $n_2^{\text{cross}} = n_{2,f}^{\text{cross}}$ .

Важным нюансом является тот факт, что коэффициент  $n_2^{\text{cross}}$ , измеряемый при двухволновом смещении, который в большинстве работ обозначается и именуется коэффициентом нелинейного показателя преломления  $n_2$ , в строгом смысле таковым не является, хотя и определяется аналогичным образом, что приводит к различным недоразумениям. В частности, в работе [11] с помощью ТГц эффекта Керра был определен  $n_2^{\text{cross}}$  воды, который составил порядка  $10^{-12} \text{ см}^2/\text{Вт}$ . Позже в работе [15] было сообщено об обнаружении методом Z-Scan гигантской керровской нелинейности у воды в ТГц диапазоне, характеризуемой коэффициентом нелинейного показателя преломления  $n_2$  порядка  $10^{-10} \text{ Вт}/\text{см}^2$ . Этот результат был подтвержден рядом других экспериментов [16, 17], а гигантская ТГц нелинейность была обнаружена в ряде прочих жидких и твердых материалов [17–21]. Расхождение результатов измерений нелинейного показателя преломления воды, полученных с помощью ТГц эффекта Керра и другими методами, вызвало ряд вопросов, а наличие гигантской нелинейности в ТГц диапазоне было поставлено под вопрос. В действительности, никакого противоречия между данными результатами нет, поскольку гигантская ТГц нелинейность была обнаружена при измерении коэффициента нелинейного показателя преломления  $n_2$ , который пропорционален нелинейной кубической восприимчивости  $\chi^{(3)}(\omega_p; \omega_p, \omega_p, -\omega_p)$  и характеризует нелинейное самовоздействие излучения в веществе, в то время как в работах, посвященных ТГц эффекту Керра, измерялся нелинейный коэффициент  $n_2^{\text{cross}}$ , который характеризует нелинейное взаимодействие двух волн в среде и не является коэффициентом нелинейного показателя преломления в строгом смысле этого слова. При такой постановке вопроса становится важной задача об установлении аналитической связи между нелинейными коэффициентами  $n_2$  и  $n_2^{\text{cross}}$ , которая позволит при измерении любого из этих коэффициентов сразу восстановить другой, а также позволит оценивать величину нелинейного набега фазы зондирующего излучения в двухволновых экспериментах с использованием ТГц излучения. Решение этой задачи важно не только с точки зрения спектроскопических измерений, но и для корректной работы ряда оптических

устройств, в частности для усиления слабых сигналов в поле ТГц волны накачки в нелинейном интерферометре Фабри–Перо [22].

В настоящей работе с помощью теории колебательной нелинейности, основанной на гипотезе, согласно которой основной вклад в нелинейный отклик вещества на поле ТГц излучения вносит ангармонизм валентных молекулярных колебаний (*stretching vibrations*), выведены аналитические выражения для коэффициента  $n_2^{\text{cross}}$ , и для отношения  $n_2^{\text{cross}}(\omega_z)/n_2(\omega_p)$ , которые могут быть рассчитаны через известные из справочной литературы тепловые, оптические и спектральные характеристики вещества. Показано, что величина отношения  $n_2^{\text{cross}}(\omega_z)/n_2(\omega_p)$  для сред, обладающих гигантской ТГц нелинейностью, зависит только от центральных частот взаимодействующих волн, центральной частоты фундаментальной полосы поглощения валентной колебательной моды и ее ширины. Продемонстрировано, что для воды и кварцевого стекла отношение  $n_2^{\text{cross}}(\omega_z)/n_2(\omega_p)$  при центральных частотах волны накачки и зондирующего излучения  $\omega_p/2\pi = 1 \text{ ТГц}$  и  $\omega_z/2\pi = 375 \text{ ТГц}$  (800 нм) составляет  $5 \times 10^{-3}$  и  $5 \times 10^{-5}$  соответственно, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

**2. Нелинейный отклик вещества в поле ТГц излучения.** Существуют различные подходы к описанию нелинейного отклика вещества в поле ТГц излучения. Ряд авторов считает, что его природа обусловлена индуцированной переориентацией молекул [23], резонансным возбуждением либрационных мод [23–25], туннельной ионизацией [26, 27], индуцированными фоновыми поляритонами [21]. Однако первая теоретическая модель, которая была предложена для описания нелинейного отклика вещества при его возбуждении ТГц излучением (далее – теория колебательной нелинейности), основывается на гипотезе о колебательной природе гигантской нелинейности в ТГц спектральном диапазоне [28]. Согласно этой гипотезе, основной вклад в нелинейное изменение показателя преломления в поле ТГц излучения вносит ангармонизм валентных молекулярных колебаний, причем эти колебания могут быть описаны с помощью классического уравнения ангармонического осциллятора. Несмотря на “классичность” данной модели, она оказалась достаточно плодовитой, в частности, именно из нее впервые было предсказано наличие гигантской нелинейности у ряда веществ в ТГц спектральном диапазоне [28]. При этом теоретические оценки коэффициента нелинейного показателя преломления, полученные с помощью данной модели, прекрасно соответствуют всем существующим

ющим на данный момент экспериментальным данным [15, 18, 20]. Более того, согласно теории колебательной нелинейности  $n_2$  прямо пропорционален (для сред с гигантской ТГц нелинейностью) квадрату коэффициента теплового расширения вещества  $\alpha_T$ , который, как известно, зависит от температуры. В частности для воды он равен нулю при  $4^\circ\text{C}$ , откуда следует, что при данной температуре  $n_2$  воды также должен быть близок к нулю. Этот факт стал поводом для сомнений в справедливости теории колебательной нелинейности, например, у авторов работы [23], которые на эксперименте не обнаружили никакой разницы в нелинейном поглощении водой ТГц излучения при  $21^\circ\text{C}$  и  $4^\circ\text{C}$ . Для разрешения этих сомнений авторы [29] экспериментально получили температурную зависимость коэффициента нелинейного показателя преломления воды в ТГц диапазоне, которая прекрасно согласуется с предсказаниями теории колебательной нелинейности. Таким образом, существуют серьезные основания полагать, что гигантская ТГц нелинейность действительно имеет колебательную природу.

Согласно теории колебательной нелинейности поляризационный отклик  $P = P_{\text{lin}} + P_{nl}$  изотропной диэлектрической среды в поле линейно-поляризованного ТГц излучения может быть описан системой параметрически связанных скалярных уравнений [30]

$$\begin{cases} \ddot{P}_{\text{lin}}^v + \gamma_v \dot{P}_{\text{lin}}^v + \omega_{0,v}^2 P_{\text{lin}}^v = q_v N_v \alpha_v E \\ \ddot{P}_{\text{nl}}^v + \gamma_v \dot{P}_{\text{nl}}^v + \omega_{0,v}^2 P_{\text{nl}}^v = R P_{\text{lin}}^v - \frac{b [P_{\text{lin}}^v]^3}{q_v^2 N_v^2} \\ \ddot{R} + \gamma_v \dot{R} + \omega_{0,v}^2 R = 2a^2 [P_{\text{lin}}^v]^2 / q_v^2 N_v^2, \end{cases} \quad (1)$$

где точка указывает на операцию дифференцирования по времени,  $P_{\text{lin}}^{(v)}$  и  $P_{\text{nl}}^{(v)}$  – линейная и нелинейная поляризации колебательной природы соответственно;  $\omega_{0,v}$  – центральная частота фундаментальной полосы поглощения валентной колебательной моды (в данной модели полагается, что доминирующий вклад в нелинейное изменение показателя преломления вносит только одна валентная колебательная мода, поэтому достаточно учесть только одну резонансную частоту; при необходимости можно учесть наличие нескольких колебательных мод, как это сделано в работе [19]);  $\gamma_v$  – ширина колебательной полосы поглощения;  $q_v$  – эффективный заряд колебательной моды;  $N_v$  – концентрация молекулярных осцилляторов в веществе;  $\alpha_v = q_v/m_v$ , где  $m_v$  – эффективная масса молекулярного осциллятора;  $E$  – напряженность электрического поля излучения;  $a$  и  $b$  – коэффициенты, характеризующие вели-

чину квадратичного и кубического ангармонизма молекулярных колебаний, соответственно;  $R$  – функционал, учитывающий вклад локального ангармонизма молекулярных колебаний в кубический макроскопический поляризационный отклик, который присутствует даже в изотропных средах, если они состоят из ассиметричных молекул. Поскольку в рассматриваемых двухволновых экспериментах в среде распространяется, помимо ТГц волны, также и волна другой частоты, которая может быть как ТГц, так и оптической, то систему (1) для корректного учета линейной дисперсии необходимо дополнить электронным осциллятором, описывающим линейный поляризационный отклик, возникающий в результате взаимодействия излучения с электронными переходами

$$\ddot{P}_{\text{lin}}^{el} + \gamma_{el} \dot{P}_{\text{lin}}^{el} + \omega_{0,el}^2 P_{\text{lin}}^{el} = AE, \quad (2)$$

который, хотя и совпадает по форме с уравнением, описывающим линейный поляризационный отклик колебательной природы, тем не менее имеет принципиально иную физическую природу. Здесь  $\omega_{0,el}$  – центральная частота резонансного электронного перехода,  $\gamma_{el}$  характеризует ширину этого перехода,  $A$  – некоторый экспериментально определяемый коэффициент, пропорциональный силе электронного осциллятора. Очевидно, что  $P_{\text{lin}} = P_{\text{lin}}^v + P_{\text{lin}}^{el}$ .

Использование уравнений (1) и (2) подразумевает, что ТГц волна индуцирует нелинейный отклик только колебательной природы (что оправдано, так как частоты электронных переходов существенно отличаются от колебательных частот), а зондирующую волну в силу своей маломощности вносит вклад только в линейный отклик. Проанализируем далее поляризационный отклик вещества при его одновременном возуждении монохроматическим излучением на частотах  $\omega_p$  и  $\omega_z$ , т.е. когда поле, возбуждающее вещество, задается выражением

$$E = \frac{1}{2} E_p e^{i\omega_p t} + \text{с.с.} + \frac{1}{2} E_z e^{i\omega_z t} + \text{с.с.}, \quad (3)$$

где  $E_p$  и  $E_z$  – амплитуды волн накачки и зондирующего излучения соответственно, причем  $E_p \gg E_z$ .

В таком случае линейный поляризационный отклик колебательного ( $v$ ) и электронного ( $el$ ) осцилляторов описывается выражениями

$$\begin{aligned} P_{\text{lin}}^{v(el)} &= \frac{1}{2} P_{0,\omega_p}^{v(el)} e^{i\omega_p t} + \\ &+ \frac{1}{2} P_{0,\omega_z}^{v(el)} e^{i\omega_z t} + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$P_{0,\omega_p}^{v(el)} = \frac{q_v^{(el)} N_v^{(el)} \alpha_{v(el)}}{\omega_{0,v(el)}^2 - \omega_p^2 + i\gamma_{v(el)} \omega_p} E_p, \quad (5)$$

$$P_{0,\omega_z}^{v(el)} = \frac{q_{v(el)} N_{v(el)} \alpha_{v(el)}}{\omega_{0,v(el)}^2 - \omega_z^2 + i\gamma_{v(el)} \omega_z} E_z. \quad (6)$$

Линейная поляризация  $P_{\text{lin}}^v$  порождает кубический макроскопический нелинейный отклик вещества, а также индуцирует локальный квадратичный ангармонизм молекулярных колебаний, который тоже вносит вклад в макроскопический кубический нелинейный поляризационный отклик среды. Квадратичный вклад описывается выражением

$$R = R_0 + \frac{1}{2} R_{2\omega_p} e^{2i\omega_p t} + \frac{1}{2} R_{2\omega_z} e^{2i\omega_z t} + \frac{1}{2} R_{\omega_s} e^{i\omega_s t} + \frac{1}{2} R_{\Delta\omega} e^{i\Delta\omega t} + \text{c.c.}, \quad (7)$$

где

$$R_0 = \frac{a^2}{q_v^2 N_v^2 \omega_{0,v}^2} (|P_{0,\omega_p}^v|^2 + |P_{0,\omega_z}^v|^2), \quad (8)$$

$$R_{2\omega_{p(z)}} = \frac{a^2 (P_{0,\omega_{p(z)}}^v)^2 / q_v^2 N_v^2}{\omega_{0,v}^2 - 4\omega_{p(z)}^2 + 2i\gamma_v \omega_{p(z)}}, \quad (9)$$

$$R_{\omega_s} = \frac{2a^2 P_{0,\omega_p}^v P_{0,\omega_z}^v / q_v^2 N_v^2}{\omega_{0,v}^2 - \omega_s^2 + i\gamma_v \omega_s}, \quad (10)$$

$$R_{\Delta\omega} = \frac{2a^2 (P_{0,\omega_p}^v)^* P_{0,\omega_z}^v / q_v^2 N_v^2}{\omega_{0,v}^2 - \Delta\omega^2 + i\gamma_v \Delta\omega}. \quad (11)$$

Здесь  $\omega_s = \omega_z + \omega_p$  и  $\Delta\omega = \omega_z - \omega_p$ . Кубический нелинейный отклик  $P_{nl}^v$  возбуждается внешним полем на частотах, соответствующим различным комбинациям частот  $\omega_p$  и  $\omega_z$ , однако в рамках рассматриваемой задачи нас интересует отклик вещества только на частотах  $\omega_p$  и  $\omega_z$ . Последний возбуждается эффективным полем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[ 2R_0 P_{0,\omega_z}^v + R_{2\omega_z} (P_{0,\omega_z}^v)^* + \right. \\ & + R_{\omega_s} (P_{0,\omega_p}^v)^* + R_{\Delta\omega} P_{0,\omega_p}^v - \\ & \left. - \frac{3b}{2q_v^2 N_v^2} \left( |P_{0,\omega_z}^v|^2 + 2|P_{0,\omega_p}^v|^2 \right) P_{0,\omega_z}^v \right] e^{i\omega_z t} \end{aligned} \quad (12)$$

и описывается выражением

$$\begin{aligned} P_{nl,\omega_z}^v &= \frac{3}{2} (\chi_{v,\omega_z}^{(3)} |E_p|^2 + \\ & + \chi_{el,\omega_z}^{(3)} |E_z|^2) \frac{E_z}{2} e^{i\omega_z t} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{v,\omega_z}^{(3)} &= \left( 2a^2 \frac{2\omega_{0,v}^2 - \omega_s^2 + i\gamma_v \omega_s}{\omega_{0,v}^2 (\omega_{0,v}^2 - \omega_s^2 + i\gamma_v \omega_s)} + \right. \\ & + \frac{2a^2}{\omega_{0,v}^2 - \Delta\omega^2 + i\gamma_v \Delta\omega} - 3b \left. \right) \times \\ & \times \frac{(\omega_{0,v}^2 - \omega_z^2 + i\gamma_v \omega_z)^{-2} q_v N_v \alpha_v^3}{|\omega_{0,v}^2 - \omega_p^2 + i\gamma_v \omega_p|^2} \frac{3}{3}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \chi_{el,\omega_z}^{(3)} &= \left( 2a^2 \frac{3\omega_{0,v}^2 - 8\omega_z^2 + 4i\gamma_v \omega_z}{\omega_{0,v}^2 (\omega_{0,v}^2 - 4\omega_p^2 + 2i\gamma_v \omega_p)} - 3b \right) \\ & \times \frac{(\omega_{0,v}^2 - \omega_p^2 + i\gamma_v \omega_p)^{-2} q_v N_v \alpha_v^3}{|\omega_{0,v}^2 - \omega_p^2 + i\gamma_v \omega_p|^2} \frac{6}{6}. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку интенсивность зондирующей волны существенно меньше интенсивности волны накачки, то слагаемым (15) в (13) можно пренебречь. В таком случае кубический нелинейный отклик на частоте  $\omega_z$  определяется кубической восприимчивостью  $\chi_{v,\omega_z}^{(3)} \equiv \chi^{(3)}(\omega_z; \omega_z, \omega_p, -\omega_p)$ . Для того, чтобы получить из кубической восприимчивости выражение для нелинейного коэффициента, запишем полную поляризацию среды на частоте  $\omega_z$

$$P_{\omega_z} = \left( \chi_{\omega_z}^{(1)} + \frac{3}{4} \chi_{v,\omega_z}^{(3)} |E_p|^2 \right) \frac{E_z}{2} e^{i\omega_z t}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{\omega_z}^{(1)} &= \frac{q_v N_v \alpha_v}{\omega_{0,v}^2 - \omega_z^2 + i\gamma_v \omega_v} + \\ & + \frac{A}{\omega_{0,el}^2 - \omega_z^2 + i\gamma_{el} \omega_{el}} \end{aligned} \quad (17)$$

– линейная восприимчивость на частоте  $\omega_z$ . Из (16) следует, что показатель преломления для зондирующей волны, находящейся в поле высокointенсивного ТГц излучения, записывается в виде

$$n_z = n_0(\omega_z) + \frac{1}{2} n_2^{\text{cross}}(\omega_z) |E_p|^2, \quad (18)$$

где  $n_0(\omega_z)$  – линейный показатель преломления на частоте зондирующего излучения,  $n_2^{\text{cross}}(\omega_z) = 6\pi \chi^{(3)}(\omega_z; \omega_z, \omega_p, -\omega_p) / n_0(\omega_z)$ . Выражение для  $n_2(\omega_p)$  получается аналогичным образом при рассмотрении нелинейного отклика среды на частоте  $\omega_p$  для второго уравнения системы (1). В таком случае для волны накачки

$$n_p = n_0(\omega_p) + \frac{1}{2} n_2(\omega_p) |E_p|^2, \quad (19)$$

где  $n_2(\omega_p) = 3\pi \chi_{v,\omega_p}^{(3)} / n_0(\omega_p)$  и

$$\begin{aligned} \chi_{v,\omega_p}^{(3)} &= \left( 2a^2 \frac{3\omega_{0,v}^2 - 8\omega_p^2 + 4i\gamma_v \omega_p}{\omega_{0,v}^2 (\omega_{0,v}^2 - 4\omega_p^2 + 2i\gamma_v \omega_p)} - \right. \\ & \left. - 3b \right) \times \frac{(\omega_{0,v}^2 - \omega_p^2 + i\gamma_v \omega_p)^{-2} q_v N_v \alpha_v^3}{|\omega_{0,v}^2 - \omega_p^2 + i\gamma_v \omega_p|^2} \frac{3}{3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что коэффициент  $n_2^{\text{cross}}$  в два раза больше коэффициента  $n_2$  даже при  $\omega_z = \omega_p$ , поскольку волна накачки и зондирующее излучение могут быть разделены пространственно [14]. Это явление также

известно, как эффект запаздывания слабой волны (*weak-wave retardation*) [31]. Чтобы установить связь между коэффициентами  $n_2^{\text{cross}}(\omega_z)$  и  $n_2(\omega_p)$ , рассмотрим отношение их действительных частей, при этом учитем, что для сред с гигантской ТГц нелинейностью коэффициентом  $b$  можно пренебречь [32]

$$\begin{aligned} & \frac{n_{2,\text{Re}}^{\text{cross}}(\omega_z)}{n_{2,\text{Re}}(\omega_p)} = \\ & = \frac{2n_0(\omega_p)}{n_0(\omega_z)} \text{Re} \left[ \left( \frac{2\omega_{0,v}^2 - \omega_s^2 + i\gamma_v\omega_s}{\omega_{0,v}^2(\omega_{0,v}^2 - \omega_s^2 + i\gamma_v\omega_s)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\omega_{0,v}^2 - \Delta\omega^2 + i\gamma_v\Delta\omega} \right) (\omega_{0,v}^2 - \omega_z^2 + i\gamma_v\omega_z)^{-2} \right] / \\ & \text{Re} \left[ \frac{3\omega_{0,v}^2 - 8\omega_p^2 + 4i\gamma_v\omega_p}{\omega_{0,v}^2(\omega_{0,v}^2 - 4\omega_p^2 + 2i\gamma_v\omega_p)(\omega_{0,v}^2 - \omega_p^2 + i\gamma_v\omega_p)^2} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Для оценки этого выражения достаточно знать частоты излучения зонда и накачки, значения линейного показателя преломления на этих частотах, а также центральную частоту фундаментальной полосы поглощения валентной колебательной моды и ее ширину. Оценки этого выражения и способы его упрощения обсуждаются в следующем разделе.

**3. Численные оценки.** Для численных оценок выражения (21) рассмотрим два хорошо изученных материала – воду  $\text{H}_2\text{O}$  и кварцевое стекло  $\text{SiO}_2$ . Фундаментальные валентные колебательные полосы, которые определяют нелинейный отклик колебательной природы этих веществ в ТГц диапазоне, имеют максимум на 100 ТГц [33] и 32.8 ТГц [34], соответственно, а ширины этих полос составляют 10.6 [33] ТГц и 3 ТГц [34]. На рисунке 1 для кварцевого стекла и воды изображена зависимость отношения (21) от частоты зондирующего излучения при  $\omega_p/2\pi = 1$  ТГц. Данные о показателе преломления этих сред взяты из работ [33, 35] и [34, 36, 37] соответственно. Из графиков 1а, с видно, что в ТГц диапазоне нелинейный коэффициент  $n_2^{\text{cross}}$ , превышая  $n_2$ , возрастает с ростом частоты зондирующего излучения, поскольку суммарная частота  $\omega_s$  приближается к резонансной, уменьшая знаменатель выражения (14). В оптическом диапазоне (графики 1б, д) наблюдается обратная ситуация:  $n_2^{\text{cross}}$  меньше  $n_2$  на несколько порядков и убывает с ростом частоты, поскольку суммарная и разностные частоты в (21) становятся существенно больше собственной частоты валентных колебаний среды, увеличивая знаменатель выражения (14).

В некоторых случаях, например при рассмотрении ТГц эффекта Керра, выражение (21) мож-

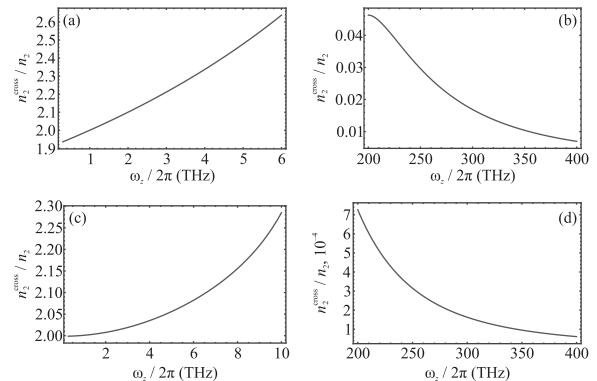


Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость отношения нелинейного коэффициента  $n_2^{\text{cross}} = 6\pi\chi^{(3)}(\omega_z; \omega_z, \omega_p, -\omega_p)/n_0(\omega_z)$  к коэффициенту нелинейного показателя преломления  $n_2 = 3\pi\chi^{(3)}(\omega_p; \omega_p, \omega_p, -\omega_p)/n_0(\omega_p)$  от центральной частоты зондирующего излучения  $\omega_z$  при  $\omega_p/2\pi = 1$  ТГц для случая: (а) – воды и ТГц зондирующего излучения; (б) – воды и оптического зондирующего излучения; (с) – кварцевого стекла и ТГц зондирующего излучения; (д) – кварцевого стекла и оптического зондирующего излучения

но существенно упростить, поскольку типичные центральные частоты спектра, которые используются в таких экспериментах составляют порядка  $\omega_p/2\pi = 1$  ТГц и порядка  $\omega_z/2\pi = 375$  ТГц (800 нм) [10, 11]. В таком случае можно приблизенно положить  $\omega_s \approx \omega_z$ ,  $\Delta\omega \approx \omega_z$ , а также  $\omega_{0,v} \gg \gamma_v, \omega_p$ , что существенно упростит выражение (21)

$$\begin{aligned} \frac{n_2^{\text{cross}}(\omega_z)}{n_2(\omega_p)} & \approx \frac{2n_0(\omega_p)}{3n_0(\omega_z)} s^4 \times \\ & \times \frac{6(1-s^2)g^2s^2 + (1-3s^2)(1-s^2)^3 - g^4}{[(s^2-1)^2 + g^2]^3}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $s = \omega_{0,v}/\omega_z$ ,  $g = \gamma_v/\omega_z$ . Заметим, что слагаемые порядка  $\gamma_v/\omega_z$  не могут быть опущены поскольку они сравнимы по величине со слагаемыми порядка  $\omega_{0,v}/\omega_z$ . Из (22) видно, что величина  $n_2^{\text{cross}}/n_2$  определяется отношением оптической частоты к ТГц, поскольку стремится при больших  $\omega_z$  к отношению  $\omega_p^4/\omega_z^4$ .

Благодаря тому, что с помощью ТГц эффекта Керра исследовано большое количество материалов, результаты расчетов по полученным в настоящей работе формулам можно сравнить с экспериментальными данными. Коэффициент нелинейного показателя преломления воды в ТГц диапазоне составляет порядка  $5 \times 10^{-10} \text{ см}^2/\text{Вт}$  [18];  $n_2$  кварцевого стекла в ТГц диапазоне не измерялся (известны только измерения, выполненные для кристаллического квар-

ца [19]). Линейный показатель преломления воды составляет  $n_0(800 \text{ нм}) = 1.329$  [33],  $n_0(1 \text{ ТГц}) = 2.13$  [35]; для кварцевого стекла:  $n_0(800 \text{ нм}) = 1.453$  [38],  $n_0(1 \text{ ТГц}) = 1.962$  [39]. Подставляя эти значения в (22) мы получаем для воды  $n_2^{\text{cross}}/n_2 \approx 5 \times 10^{-3}$ , откуда, соответственно, следует  $n_2^{\text{cross}} \approx 3 \times 10^{-12} \text{ см}^2/\text{Вт}$ . Экспериментальное значение, измеренное в ТГц эффекте Керра, составляет  $4 \times 10^{-12} \text{ см}^2/\text{Вт}$  [11].

Для кварцевого стекла  $n_2^{\text{cross}}/n_2 \approx 5 \times 10^{-5}$ , однако ввиду отсутствия экспериментально измеренного  $n_2$ , значение  $n_2^{\text{cross}}$  необходимо рассчитать напрямую из выражения (14), используя соотношения для коэффициентов [28]

$$a = -\frac{m_v \omega_{0,v}^4 L_0}{k_B} \alpha_T, \quad (23)$$

где  $L_0$  – диаметр молекулы (постоянная решетки в случае кристаллических тел),  $k_B$  – постоянная Больцмана и  $\alpha_T$  – коэффициент теплового расширения;

$$b = \frac{6\pi q_v^2 N_v \omega_{0,v}}{\hbar(n_{0,v}^2 - 1)}, \quad (24)$$

где  $\hbar$  – приведенная постоянная Планка,  $n_{0,v}$  – часть линейного показателя преломления, обусловленная валентными колебаниями, вдали от резонанса ( $\omega_p \ll \omega_{0,v}$ );

$$\alpha = \frac{\omega_{0,v}^2}{4\pi q_v N_v} (n_{0,v}^2 - 1). \quad (25)$$

Используя эти выражения, а также значения материальных параметров, которые приведены в Приложении, получаем из формулы (14) для кварцевого стекла  $n_2^{\text{cross}} \approx 2 \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$  (экспериментальное значение из ТГц эффекта Керра  $3 \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$  [10]). Из (21) также можно оценить коэффициент нелинейного показателя преломления кварцевого стекла  $n_2 \approx 3 \times 10^{-12} \text{ см}^2/\text{Вт}$ , откуда, используя рассчитанное выше отношение двух нелинейных коэффициентов, мы получаем то же значение  $n_2^{\text{cross}} \approx 2 \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ . Таким образом, все полученные оценки прекрасно соответствуют экспериментальным данным.

**4. Заключение.** В настоящей работе из теории колебательной нелинейности, основанной на гипотезе, согласно которой нелинейность показателя преломления в ТГц спектральном диапазоне определяется ангармонизмом валентных молекулярных колебаний (*stretching vibrations*), выведено соотношение, устанавливающее аналитическую связь между коэффициентом нелинейного показателя преломления колебательной природы

$n_2 = 3\pi\chi^{(3)}(\omega_p; \omega_p, \omega_p, -\omega_p)/n_0(\omega_p)$ , характеризующим эффекты нелинейного самовоздействия ТГц излучения на частоте  $\omega_p$  в веществе, и коэффициентом  $n_2^{(\text{cross})} = 6\pi\chi^{(3)}(\omega_z; \omega_z, \omega_p, -\omega_p)/n_0(\omega_z)$ , характеризующим эффекты перекрестного взаимодействия маломощного зондирующего излучения на частоте  $\omega_z$  и высокointенсивного ТГц излучения накачки на частоте  $\omega_p$ , при их распространении в веществе. Для численной оценки этого соотношения для заданных монохроматических компонент излучения зонда и накачки достаточно знать центральную частоту доминирующей валентной колебательной полосы поглощения материала и ее ширину. Это дает возможность оценивать величину нелинейного набега фазы зондирующего импульса в экспериментах типа *ritter-probe*, используя разложение электрического поля импульса по монохроматическим компонентам в интеграл Фурье, что важно как для спектроскопических измерений, так и для создания устройств управления излучением на основе нелинейных интерферометров. Показано, что для воды и кварцевого стекла отношение  $n_2^{\text{cross}}(\omega_z)/n_2(\omega_p)$  при центральных частотах  $\omega_p/2\pi = 1 \text{ ТГц}$  и  $\omega_p/2\pi = 375 \text{ ТГц}$  (800 нм) составляет  $5 \times 10^{-3}$  и  $5 \times 10^{-5}$  соответственно, что прекрасно согласуется с экспериментальными данными.

### Приложение

Для оценки коэффициентов (23), (24), (25) использовались следующие значения материальных параметров: эффективная масса рассчитывалась аналогично [28] по формуле приведенной массы осциллятора Si–O  $m_v = m_{\text{Si}} m_{\text{O}} / (m_{\text{Si}} + m_{\text{O}})$ , где  $m_{\text{Si}}, m_{\text{O}}$  – массы атомов кремния и кислорода, соответственно;  $L_0 = 5 \text{ \AA}$  [40];  $\alpha_T = 2.1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  [41] (несмотря на то, что макроскопический коэффициент теплового расширения кварцевого стекла составляет  $0.55 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , в работе [41] было показано, что на микроскопическом уровне он больше почти на два порядка); величина заряда  $q_v$  принималась равной элементарному заряду  $4.8 \times 10^{-10} \text{ Фр}$ ; концентрация молекулярных осцилляторов рассчитывалась как  $N_v = \rho / (m_{\text{Si}} + 2m_{\text{O}})$ , где  $\rho = 2.20 \text{ г}/\text{см}^3$  – плотность кварцевого стекла [40]; колебательная часть нерезонансного линейного показателя преломления рассчитывалась по формуле  $n_{0,v} = \sqrt{1 + n_0^2(\omega_p) - n_{el}^2(\omega_p)}$ , где  $n_{el}(\omega_p) = 1.7$  [34] – часть показателя преломления в ТГц диапазоне, обусловленная электронными и невалентными колебательными переходами.

Автор статьи выражает благодарность профессору С. А. Козлову за полезные обсуждения.

**Финансирование работы.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 24-22-00084).

**Конфликт интересов.** Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. X. C. Zhang, A. Shkurinov, and Y. Zhang, *Nat. Photonics* **11**(1), 16 (2017).
2. A. Glagolewa-Arkadiewa, *Nature*, **113**(2844), 640 (1924).
3. J. A. Fülöp, S. Tzortzakis, and T. Kampfrath, *Adv. Opt. Mater.* **8**(3), 1900681 (2020).
4. P. U. Jepsen, D. G. Cooke, and M. Kochs, *Adv. Opt. Mater.* **5**(1), 124 (2011).
5. J. B. Baxter and G. W. Guglietta, *Anal. Chem.* **83**(12), 4342 (2011).
6. L. Zhang, Z. Min, Mujumdar, and S. Arun, *Food Reviews International* **39**(3), 1733 (2023).
7. X.-C. Zhang and J. Xu, *Introduction to THz wave photonics*, Springer, N.Y. (2010).
8. X.-C. Zhang, E. Yiwen, L. Zhang, and A. Tsyplkin, *Terahertz Liquid Photonics*, World Scientific, New Jersey (2023).
9. M. C. Hoffmann, N. C. Brandt, H. Y. Hwang, K. L. Yeh, and K. A. Nelson, *Appl. Phys. Lett.* **95**(23), 231105 (2009).
10. S. Bodrov, Y. Sergeev, A. Murzanev, and A. Stepanov, *J. Chem. Phys.* **147**(8), 084507 (2017).
11. S. Sarbak, G. Sharma, C. S. Joseph, W. E. Kucia, K. Dobek, R. H. Giles, and A. Dobek, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **19**(39), 26749 (2017).
12. T. Kampfrath, R. K. Campen, M. Wolf, and M. Sajadi, *J. Phys. Chem. Lett.* **9**(6), 1279 (2018).
13. H. Zhao, Y. Tan, R. Zhang, Y. Zhao, C. Zhang, and L. Zhang, *Opt. Lett.* **46**(2), 230 (2021).
14. W. R. Boyd, *Nonlinear Optics*, Elsevier, N.Y. (2020).
15. A. N. Tsyplkin, M. V. Melnik, M. O. Zhukova, I. O. Vorontsova, S. E. Putilin, S. A. Kozlov, and X.-C. Zhang, *Opt. Express* **27**(8), 10419 (2019).
16. F. Novelli, C. Y. Ma, N. Adhlakha, E. M. Adams, T. Ockelmann, D. Das Mahanta, P. Di Pietro, A. Perucchi, and M. Havenith, *Appl. Sci.* **10**(15), 5290 (2020).
17. K. J. Garriga Francis, X.-C. Zhang, M. Lim Pac Chong, and Y. E, *Opt. Lett.* **45**(20), 5628 (2020).
18. A. Tsyplkin, M. Zhukova, M. Melnik, I. Vorontsova, M. Kulya, S. Putilin, S. Kozlov, and R. W. Boyd, *Phys. Rev. Appl.* **15**(5), 054009 (2021).
19. S. Zibod, P. Rasekh, M. Yildrim, W. Cui, R. Bhardwaj, J. M. Ménard, R. Boyd, and K. Dolgaleva, *Adv. Opt. Mater.* **11**(5), 2202343 (2023).
20. A. Nabilkova, A. Ismagilov, M. Melnik, D. Gushchin, M. Zhukova, M. Guselnikov, S. Kozlov, and A. Tsyplkin, *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* **14**(5), 718 (2024).
21. Y. Huang, Y. Lu, W. Li, X. Xu, X. Jiang, R. Ma, and J. Xu, *Light Sci. Appl.* **13**(1), 212 (2024).
22. H. Gibbs, *Optical bistability: controlling light with light*, Elsevier, N.Y. (2012).
23. C. Millon, J. Schmidt, S. Ramos, E. van Dam, A. Buchmann, C. Saraceno, and F. Novelli, *Adv. Opt. Mater.* **12**(11), 115319 (2022).
24. F. Novelli, L. Ruiz Pestana, K. C. Bennett, F. Sebastiani, E. M. Adams, N. Stavrias, and M. Havenith, *J. Phys. Chem. Lett.* **124**(24), 4989 (2020).
25. F. Novelli, C. Hoberg, E. M. Adams, J. M. Klopf, and M. Havenith, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **24**(2), 653 (2022).
26. A. Ghalgaoui, L. Koll, B. Schutte, B. Fingerhut, K. Reimann, M. Woerner, and T. Elsaesser, *J. Phys. Chem. Lett.* **11**(18), 7717 (2020).
27. A. Ghalgaoui, B. P. Fingerhut, K. Reimann, T. Elsaesser, and M. Woerner, *Phys. Rev. Lett.* **129**(9), 097401 (2021).
28. K. Dolgaleva, D. V. Materikina, R. W. Boyd, and S. A. Kozlov, *Phys. Rev. A* **92**(2), 023809 (2015).
29. A. Nabilkova, A. Ismagilov, M. Melnik, A. Tsyplkin, M. Guselnikov, S. Kozlov, and X. C. Zhang, *Opt. Lett.* **48**(5), 1312 (2023).
30. M. S. Guselnikov, M. O. Zhukova, and S. A. Kozlov, *Journal of Optical Technology* **89**(7), 371 (2022).
31. R. Y. Chiao and P. L. Kelley, *Phys. Rev. Lett.* **17**(22), 1158 (1966).
32. M. Guselnikov, M. Zhukova, and S. Kozlov, *Opt. Spectrosc.* **131**(2), 268 (2023).
33. G. M. Hale and M. Querry, *Appl. Opt.* **12**(3), 555 (1973).
34. R. Kitamura, L. Pilon, and M. Jonasz, *Appl. Opt.* **46**(33), 8118 (2007).
35. J. Zhou, X. Rao, X. Liu, T. Li, L. Zhou, Y. Zheng, and Z. Zhu, *AIP Adv.* **9**(3), 035346 (2019).
36. Y. Arosa and R. de la Fuente, *Opt. Lett.* **45**(15), 4268 (2020).
37. S. Popova, T. Tolstykh, and V. Vorobev, *Opt. Spectrosc.* **33**(4), 444 (1972).
38. I. H. Malitson, *J. Opt. Soc. Am.* **55**(10), 1205 (1965).
39. M. Naftaly and R. E. Miles, *J. Appl. Phys.* **102**(4), 043517 (2007).
40. S. Mizutani, I. Ohdomari, T. Miyazawa, T. Iwamori, I. Kimura, and K. Yoneda, *J. Appl. Phys.* **53**(3), 1470 (1982).
41. B. Deng, Y. Shi, and F. Yuan, *Materialia* **12**(3), 100752 (2020).